



高考总复习单元测评卷

命题新趋势 高考新题型

真题分类精练

ZHENTIFENLEIJIJINGLIAN 主编：肖德好

Mathematics

数学

开明出版社

CONTENTS

目录

考点 1 集合	练 001
考点 2 常用逻辑用语	练 002
考点 3 不等式	练 003
考点 4 函数的概念及其表示	练 004
考点 5 函数的基本性质	练 005
考点 6 幂函数、指数函数、对数函数	练 007
考点 7 函数的图象、函数的零点及应用	练 009
考点 8 函数与数学模型	练 011
考点 9 导数的概念及其几何意义	练 012
考点 10 导数的应用	练 013
题型 1 导数解答题专练	练 015
考点 11 三角函数的概念、同角三角函数的基本关系式	练 019
考点 12 三角恒等变换	练 020
考点 13 三角函数的图象与性质	练 021
考点 14 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$	练 022
考点 15 正余弦定理及其应用	练 023
考点 16 平面向量的线性运算、平面向量基本定理	练 024
考点 17 平面向量的数量积	练 025
考点 18 复数	练 026
题型 2 解三角形解答题专练	练 027
考点 19 等差数列	练 031
考点 20 等比数列	练 032

考点 21	数列递推与数列综合问题	练 033
题型 3	数列解答题专练	练 035
考点 22	空间几何体的结构特征、表面积与体积	练 039
考点 23	空间几何体与球	练 041
考点 24	空间中的平行与垂直	练 042
考点 25	空间角与空间距离	练 043
题型 4	立体几何解答题专练	练 044
题型 5	折叠问题与探索性问题	练 048
考点 26	直线与圆	练 050
考点 27	椭圆	练 052
考点 28	双曲线	练 054
考点 29	抛物线	练 055
题型 6	圆锥曲线的综合问题(一) 求值与证明问题	练 056
题型 7	圆锥曲线的综合问题(二) 定点、定值问题	练 058
题型 8	圆锥曲线的综合问题(三) 最值、范围问题	练 059
题型 9	圆锥曲线的综合问题(四) 探索性问题	练 060
考点 30	统计	练 061
考点 31	排列与组合	练 062
考点 32	二项式定理	练 063
考点 33	概率	练 064
考点 34	随机变量及其分布	练 065
题型 10	统计与概率解答题专练	练 066
题型 11	创新题型	练 070

考点 1 集合

1. [2024·天津卷] 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$
 C. $\{2, 4\}$ D. $\{1\}$
2. [2024·北京卷] 已知集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$, $N = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()
 A. $\{x | -1 \leq x < 1\}$
 B. $\{x | x > -3\}$
 C. $\{x | -3 < x < 4\}$
 D. $\{x | x < 4\}$
3. [2023·全国乙卷] 设全集 $U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, 集合 $M = \{0, 4, 6\}$, $N = \{0, 1, 6\}$, 则 $M \cup (\complement_U N) =$ ()
 A. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ B. $\{0, 1, 4, 6, 8\}$
 C. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ D. U
4. [2024·新课标 I 卷] 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$
 C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
5. [2023·新课标 I 卷] 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
 C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$
6. [2022·全国乙卷] 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 3\}$, 则 ()
 A. $2 \in M$ B. $3 \in M$
 C. $4 \notin M$ D. $5 \notin M$
7. [2024·全国甲卷] 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A (A \cap B) =$ ()
 A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$
 C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$
8. [2022·全国甲卷] 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$, 则 $\complement_U (A \cup B) =$ ()
 A. $\{1, 3\}$ B. $\{0, 3\}$
 C. $\{-2, 1\}$ D. $\{-2, 0\}$
9. [2023·全国乙卷] 设集合 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $\{x | x \geq 2\} =$ ()
 A. $\complement_U (M \cup N)$ B. $N \cup (\complement_U M)$
 C. $\complement_U (M \cap N)$ D. $M \cup (\complement_U N)$
10. [2023·全国甲卷] 设全集 $U = \mathbf{Z}$, 集合 $M = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $\complement_U (M \cup N) =$ ()
 A. $\{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$
 B. $\{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$
 C. $\{x | x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$
 D. \emptyset
11. [2020·全国卷 III] 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}^*, y \geq x\}$, $B = \{(x, y) | x + y = 8\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()
 A. 2 B. 3
 C. 4 D. 6
12. [2023·新课标 II 卷] 设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, a - 2, 2a - 2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()
 A. 2 B. 1
 C. $\frac{2}{3}$ D. -1
13. [2020·全国新高考 I 卷] 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ()
 A. 62% B. 56%
 C. 46% D. 42%
14. [2020·浙江卷] 设集合 $S, T, S \subseteq \mathbf{N}^*, T \subseteq \mathbf{N}^*$, S, T 中至少有 2 个元素, 且 S, T 满足:
 ① 对于任意的 $x, y \in S$, 若 $x \neq y$, 则 $xy \in T$;
 ② 对于任意的 $x, y \in T$, 若 $x < y$, 则 $\frac{y}{x} \in S$. 下列命题正确的是 ()
 A. 若 S 有 4 个元素, 则 $S \cup T$ 有 7 个元素
 B. 若 S 有 4 个元素, 则 $S \cup T$ 有 6 个元素
 C. 若 S 有 3 个元素, 则 $S \cup T$ 有 5 个元素
 D. 若 S 有 3 个元素, 则 $S \cup T$ 有 4 个元素

考点2 常用逻辑用语

1. [2015·全国卷I] 设命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为 ()
- A. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$
B. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$
C. $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$
D. $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 = 2^n$
2. [2024·天津卷] 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a^3 = b^3$ ”是“ $3^a = 3^b$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
3. [2024·新课标II卷] 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$, 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则 ()
- A. p 和 q 都是真命题
B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题
D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
4. [2024·北京卷] 设 a, b 是向量, 则“ $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ ”是“ $a=b$ 或 $a=-b$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
5. [2022·浙江卷] 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $\sin x = 1$ ”是“ $\cos x = 0$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
6. [2020·浙江卷] 已知空间中不过同一点的三条直线 l, m, n , “ l, m, n 共面”是“ l, m, n 两两相交”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
7. [2023·全国甲卷] 设甲: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 乙: $\sin \alpha + \cos \beta = 0$, 则 ()
- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
8. [2021·北京卷] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增”是“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 ()
- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
9. [2019·浙江卷] 设 $a > 0, b > 0$, 则“ $a+b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
10. [2023·新课标I卷] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 ()
- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
11. [2020·北京卷] 已知 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 则“存在 $k \in \mathbf{Z}$ 使得 $\alpha = k\pi + (-1)^k \beta$ ”是“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”的 ()
- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

考点3 不等式

- [2020·全国卷I] 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{-4, 1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-4, 1\}$ B. $\{1, 5\}$
 C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 3\}$
- [2019·天津卷] 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的 ()
 A. 充分而不必要条件
 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- [2022·上海卷] 若实数 a, b 满足 $a > b > 0$, 则下列不等式中恒成立的是 ()
 A. $a + b > 2\sqrt{ab}$
 B. $a + b < 2\sqrt{ab}$
 C. $\frac{a}{2} + 2b > 2\sqrt{ab}$
 D. $\frac{a}{2} + 2b < 2\sqrt{ab}$
- [2023·北京卷] 若 $xy \neq 0$, 则“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -2$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- [2021·全国乙卷] 下列函数中最小值为4的是 ()
 A. $y = x^2 + 2x + 4$
 B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
 C. $y = 2^x + 2^{2-x}$
 D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$
- (多选题)[2020·全国新高考I卷] 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()
 A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$
 B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
 C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$
 D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$
- (多选题)[2022·新高考全国II卷] 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()
 A. $x + y < 1$ B. $x + y \geq -2$
 C. $x^2 + y^2 \geq 1$ D. $x^2 + y^2 \leq 2$
- [2023·上海卷] 不等式 $|x - 2| < 1$ 的解集为_____.
- [2017·北京卷] 能够说明“设 a, b, c 是任意实数. 若 $a > b > c$, 则 $a + b > c$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____.
- [2021·天津卷] 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为_____.
- [2020·江苏卷] 已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____.

考点4 函数的概念及其表示

1. [2016·全国卷Ⅱ] 下列函数中,其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ()
- A. $y=x$ B. $y=\lg x$
 C. $y=2^x$ D. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$
2. [2015·湖北卷] 设 $x \in \mathbf{R}$, 定义符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则 ()
- A. $|x| = x |\operatorname{sgn} x|$
 B. $|x| = x \operatorname{sgn} |x|$
 C. $|x| = |x| \operatorname{sgn} x$
 D. $|x| = x \operatorname{sgn} x$
3. [2017·山东卷] 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 2(x-1), & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(a) = f(a+1)$, 则 $f\left(\frac{1}{a}\right) =$ ()
- A. 2 B. 4
 C. 6 D. 8
4. [2018·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -1]$
 B. $(0, +\infty)$
 C. $(-1, 0)$
 D. $(-\infty, 0)$
5. [2015·浙江卷] 存在函数 $f(x)$ 满足: 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 ()
- A. $f(\sin 2x) = \sin x$
 B. $f(\sin 2x) = x^2 + x$
 C. $f(x^2 + 1) = |x + 1|$
 D. $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$
6. [2024·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是 ()
- A. $f(10) > 100$
 B. $f(20) > 1000$
 C. $f(10) < 1000$
 D. $f(20) < 10\ 000$
7. [2022·北京卷] 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.
8. [2023·上海卷] 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域是_____.
9. [2021·浙江卷] 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x > 2, \\ |x - 3| + a, & x \leq 2. \end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6})) = 3$, 则 $a =$ _____.
10. [2022·浙江卷] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \leq 1, \\ x + \frac{1}{x} - 1, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$ _____; 若当 $x \in [a, b]$ 时, $1 \leq f(x) \leq 3$, 则 $b - a$ 的最大值是_____.
11. [2017·全国卷Ⅲ] 设函数 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ 的 x 的取值范围是_____.

考点5 函数的基本性质

考向1 函数单调性、奇偶性、周期性的简单应用

1. [2017·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 ()
 A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, 1)$
 C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$
2. [2024·天津卷] 下列函数是偶函数的是 ()
 A. $y = \frac{e^x - x^2}{x^2 + 1}$ B. $y = \frac{\cos x + x^2}{x^2 + 1}$
 C. $y = \frac{e^x - x}{x + 1}$ D. $y = \frac{\sin x + 4x}{e^{|x|}}$
3. [2022·北京卷] 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}$, 则对任意实数 x , 有 ()
 A. $f(-x) + f(x) = 0$
 B. $f(-x) - f(x) = 0$
 C. $f(-x) + f(x) = 1$
 D. $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$
4. [2021·全国乙卷] 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()
 A. $f(x-1) - 1$ B. $f(x-1) + 1$
 C. $f(x+1) - 1$ D. $f(x+1) + 1$
5. [2023·全国乙卷] 已知 $f(x) = \frac{x e^x}{e^{ax} - 1}$ 是偶函数, 则 $a =$ ()
 A. -2 B. -1
 C. 1 D. 2
6. [2023·北京卷] 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()
 A. $f(x) = -\ln x$ B. $f(x) = \frac{1}{2^x}$
 C. $f(x) = -\frac{1}{x}$ D. $f(x) = 3^{|x-1|}$
7. [2023·新课标Ⅰ卷] 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$
 C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$
8. [2019·全国卷Ⅱ] 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ()
 A. $e^{-x} - 1$ B. $e^{-x} + 1$
 C. $-e^{-x} - 1$ D. $-e^{-x} + 1$
9. [2024·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$
 C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$
10. [2021·全国甲卷] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) =$ ()
 A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$
 C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$
11. [2021·新高考全国Ⅰ卷] 已知函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a =$ _____ .
12. [2022·北京卷] 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax + 1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为 _____; a 的最大值为 _____ .
13. [2019·全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -e^{ax}$. 若 $f(\ln 2) = 8$, 则 $a =$ _____ .
14. [2023·全国甲卷] 若 $f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____ .
15. [2018·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) =$ _____ .

考向2 函数性质的综合应用

16. [2023·全国甲卷] 已知函数 $f(x) = e^{-(x-1)^2}$, 记 $a = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 则 ()
- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
17. [2017·全国卷 I] 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是 ()
- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$
C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$
18. [2017·全国卷 I] 已知函数 $f(x) = \ln x + \ln(2-x)$, 则 ()
- A. $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增
B. $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减
C. $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称
D. $y = f(x)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称
19. [2021·新高考全国 II 卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+2)$ 是偶函数, $f(2x+1)$ 是奇函数, 则 ()
- A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ B. $f(-1) = 0$
C. $f(2) = 0$ D. $f(4) = 0$
20. [2020·全国新高考 I 卷] 若定义在 \mathbf{R} 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()
- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$
B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$
21. [2022·全国乙卷] 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x) + g(2-x) = 5$, $g(x) - f(x-4) = 7$, 若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$ ()
- A. -21 B. -22
C. -23 D. -24

22. [2022·新高考全国 II 卷] 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$ ()
- A. -3 B. -2 C. 0 D. 1
23. [2020·全国卷 I] 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则 ()
- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$
C. $a > b^2$ D. $a < b^2$
24. (多选题)[2023·新课标 I 卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 ()
- A. $f(0) = 0$
B. $f(1) = 0$
C. $f(x)$ 是偶函数
D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点
25. (多选题)[2022·新高考全国 I 卷] 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right), g(2+x)$ 均为偶函数, 则 ()
- A. $f(0) = 0$
B. $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
C. $f(-1) = f(4)$
D. $g(-1) = g(2)$
26. [2023·北京卷] 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -a, \\ \sqrt{a^2-x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ -\sqrt{x}-1, & x > a. \end{cases}$ 给出下列四个结论:
- ① $f(x)$ 在区间 $(a-1, +\infty)$ 上单调递减;
② 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值;
③ 设 $M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$, 则 $|MN| > 1$;
④ 设 $P(x_3, f(x_3)) (x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4)) (x_4 \geq -a)$, 若 $|PQ|$ 存在最小值, 则 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.
- 其中所有正确结论的序号是_____.

考点6 幂函数、指数函数、对数函数

考向1 指、对数的运算

1. [2020·全国卷I] 设 $a \log_3 4 = 2$, 则 $4^{-a} =$ ()

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{9}$
C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

2. [2022·浙江卷] 已知 $2^a = 5$, $\log_8 3 = b$, 则 $4^{a-3b} =$ ()

- A. 25 B. 5
C. $\frac{25}{9}$ D. $\frac{5}{3}$

3. [2021·天津卷] 若 $2^a = 5^b = 10$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ ()

- A. -1 B. $\lg 7$
C. 1 D. $\log_7 10$

4. [2022·天津卷] 化简 $(2\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$ 的值为 ()

- A. 1 B. 2
C. 4 D. 6

5. [2024·北京卷] 生物丰富度指数 $d = \frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标, 其中 S, N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数. 生物丰富度指数 d 越大, 水质越好. 如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化, 生物个体总数由 N_1 变为 N_2 , 生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15, 则 ()

- A. $3N_2 = 2N_1$ B. $2N_2 = 3N_1$
C. $N_2^2 = N_1^3$ D. $N_2^3 = N_1^2$

6. [2018·全国卷I] 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$, 若 $f(3) = 1$, 则 $a =$ _____.

7. [2024·全国甲卷] 已知 $a > 1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

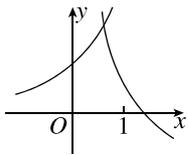
考向2 基本初等函数的图象与性质

8. [2019·全国卷II] 若 $a > b$, 则 ()
A. $\ln(a-b) > 0$ B. $3^a < 3^b$
C. $a^3 - b^3 > 0$ D. $|a| > |b|$

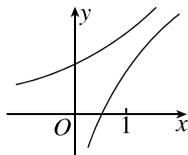
9. [2024·天津卷] 若 $a = 4 \cdot 2^{-0.3}$, $b = 4 \cdot 2^{0.3}$, $c = \log_{4.2} 0.2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

10. [2020·全国卷II] 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, 则 $f(x)$ ()
A. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增
B. 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减
C. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增
D. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减

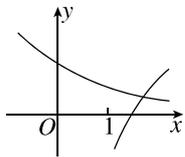
11. [2019·浙江卷] 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y = \log_a\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像可能是 ()



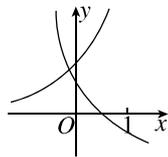
A



B



C



D

12. [2021·新高考全国 II 卷] 已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_8 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

13. [2020·北京卷] 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ()

- A. $(-1, 1)$
B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(0, 1)$
D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

14. [2024·北京卷] 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是函数 $y = 2^x$ 的图象上两个不同的点, 则 ()

- A. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$
B. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \frac{x_1 + x_2}{2}$
C. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < x_1 + x_2$
D. $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > x_1 + x_2$

15. [2021·天津卷] 设 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$, $c = 0.4^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$
B. $c < a < b$
C. $b < c < a$
D. $a < c < b$

16. [2020·全国卷 III] 已知 $5^5 < 8^4$, $13^4 < 8^5$. 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_8 5$, $c = \log_{13} 8$, 则 ()

- A. $a < b < c$
B. $b < a < c$
C. $b < c < a$
D. $c < a < b$

17. [2020·全国卷 II] 若 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 则 ()

- A. $\ln(y - x + 1) > 0$
B. $\ln(y - x + 1) < 0$
C. $\ln|x - y| > 0$
D. $\ln|x - y| < 0$

18. [2021·新高考全国 II 卷] 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$: _____.

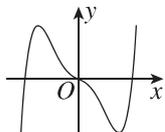
- ① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$;
② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$;
③ $f'(x)$ 是奇函数.

考点7 函数的图象、函数的零点及应用

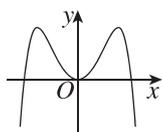
角度1 函数图象的判断

1. [2024·全国甲卷] 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的图象大致为

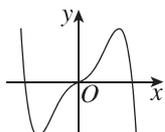
()



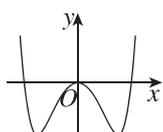
A



B



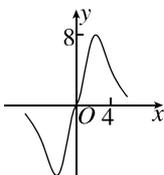
C



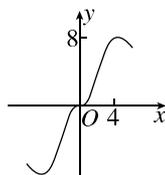
D

2. [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 的图象大致为

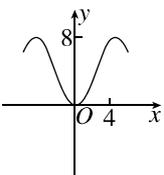
()



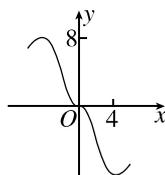
A



B



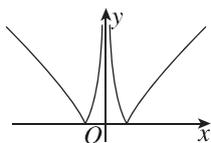
C



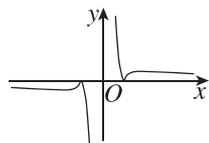
D

3. [2022·天津卷] 函数 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}$ 的图象为

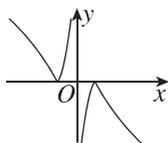
()



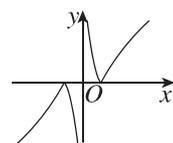
A



B



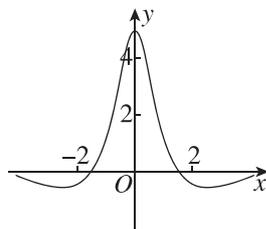
C



D

4. [2023·天津卷] 函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为

()



A. $f(x) = \frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2 + 2}$

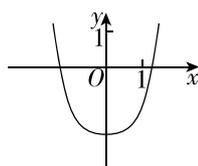
B. $f(x) = \frac{5\sin x}{x^2 + 1}$

C. $f(x) = \frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2 + 2}$

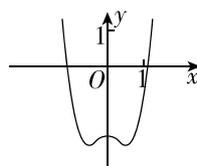
D. $f(x) = \frac{5\cos x}{x^2 + 1}$

5. [2018·全国卷Ⅲ] 函数 $y = -x^4 + x^2 + 2$ 的图象大致为

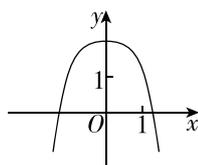
()



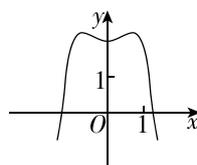
A



B



C



D

6. [2021·浙江卷] 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$,

$g(x) = \sin x$, 则图像为下图的函数可能是

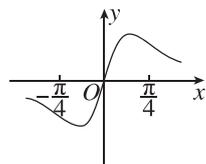
()

A. $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$

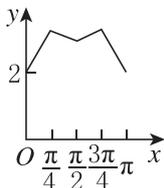
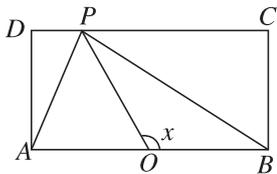
B. $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4}$

C. $y = f(x)g(x)$

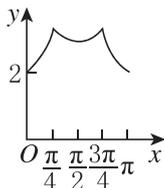
D. $y = \frac{g(x)}{f(x)}$



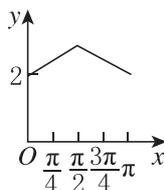
7. [2015·全国卷Ⅱ] 如图,长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2, BC=1, O$ 是 AB 的中点,点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动,记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图像大致为 ()



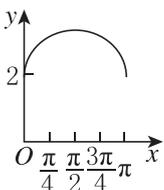
A



B



C



D

角度2 函数的零点

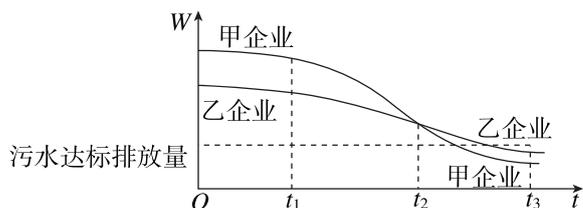
8. [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0, 2\pi]$ 的零点个数为 ()
- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5
9. [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $[-1, 0)$
B. $[0, +\infty)$
C. $[-1, +\infty)$
D. $[1, +\infty)$
10. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1, g(x)=\cos x+2ax$ (a 为常数), 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a=$ ()
- A. -1 B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. 2

11. [2017·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a=$ ()
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{2}$ D. 1
12. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 a^2+b^2 的最小值为 ()
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{2}$ D. 1
13. [2019·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x+1)=2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, \frac{9}{4}]$ B. $(-\infty, \frac{7}{3}]$
C. $(-\infty, \frac{5}{2}]$ D. $(-\infty, \frac{8}{3}]$
14. [2020·浙江卷] 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 对于任意 $x \geq 0$ 均有 $(x-a)(x-b)(x-2a-b) \geq 0$, 则 ()
- A. $a < 0$ B. $a > 0$
C. $b < 0$ D. $b > 0$
15. [2021·北京卷] 已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$, 给出下列四个结论:
- ①若 $k=0$, 则 $f(x)$ 恰有 2 个零点;
②存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点;
③存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点;
④存在正数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点.
- 其中所有正确结论的序号是_____.
16. [2024·天津卷] 若函数 $f(x)=2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1$ 有唯一零点, 则 a 的取值范围为_____.
17. [2022·天津卷] 设 $a \in \mathbf{R}$, 对于任意实数 x , 记 $f(x)=\min\{|x|-2, x^2-ax+3a-5\}$, 若 $f(x)$ 至少有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.

考点9 导数的概念及其几何意义

- [2020·全国卷I] 函数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()
 A. $y = -2x - 1$ B. $y = -2x + 1$
 C. $y = 2x - 3$ D. $y = 2x + 1$
- [2023·全国甲卷] 曲线 $y = \frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(1, \frac{e}{2})$ 处的切线方程为 ()
 A. $y = \frac{e}{4}x$ B. $y = \frac{e}{2}x$
 C. $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$ D. $y = \frac{e}{2}x + \frac{3e}{4}$
- [2019·全国卷III] 已知曲线 $y = ae^x + x \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$, 则 ()
 A. $a = e, b = -1$
 B. $a = e, b = 1$
 C. $a = e^{-1}, b = 1$
 D. $a = e^{-1}, b = -1$
- [2021·新高考全国I卷] 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线, 则 ()
 A. $e^b < a$ B. $e^a < b$
 C. $0 < a < e^b$ D. $0 < b < e^a$
- [2024·全国甲卷] 设函数 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1 + x^2}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 ()
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$
 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
- [2021·全国甲卷] 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.
- [2018·天津卷] 已知函数 $f(x) = e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为_____.
- [2020·全国卷I] 曲线 $y = \ln x + x + 1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为_____.

- [2022·新高考全国I卷] 若曲线 $y = (x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是_____.
- [2022·新高考全国II卷] 曲线 $y = \ln|x|$ 经过坐标原点的两条切线方程分别为_____, _____.
- [2024·新课标I卷] 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则 $a =$ _____.
- [2020·北京卷] 为满足人民对美好生活的向往, 环保部门要求相关企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改. 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W = f(t)$, 用 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱. 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示.



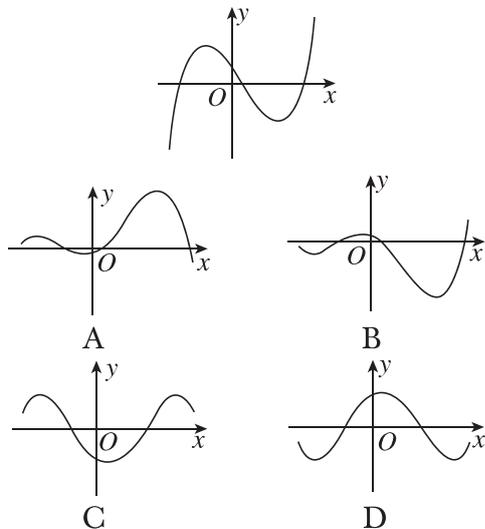
给出下列四个结论:

- ①在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
 - ②在 t_2 时刻, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
 - ③在 t_3 时刻, 甲、乙两企业的污水排放量都已达标;
 - ④甲企业在 $[0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3]$ 这三段时间中, 在 $[0, t_1]$ 的污水治理能力最强.
- 其中所有正确结论的序号是_____.

考点 10 导数的应用

考向 1 函数的单调性与导数

1. [2016 · 全国卷 I] 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $[-1, 1]$ B. $[-1, \frac{1}{3}]$
- C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ D. $[-1, -\frac{1}{3}]$
2. [2017 · 浙江卷] 函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图像如图所示, 则函数 $y = f(x)$ 的图像可能是 ()



3. [2023 · 新课标 II 卷] 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增, 则 a 的最小值为 ()
- A. e^2 B. e
- C. e^{-1} D. e^{-2}
4. [2017 · 山东卷] 若函数 $e^x f(x)$ ($e = 2.718 28 \dots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增, 则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质. 下列函数中具有 M 性质的是 ()
- A. $f(x) = 2^{-x}$
- B. $f(x) = x^2$
- C. $f(x) = 3^{-x}$
- D. $f(x) = \cos x$

5. [2015 · 全国卷 II] 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
6. [2019 · 北京卷] 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____; 若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 则 a 的取值范围是 _____.
7. [2024 · 全国甲卷] 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为 _____.
8. [2023 · 全国乙卷] 设 $a \in (0, 1)$, 若函数 $f(x) = a^x + (1+a)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 _____.

考向 2 函数的极值与最值

9. [2022 · 全国甲卷] 当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 , 则 $f'(2) =$ ()
- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{2}$ D. 1
10. [2023 · 全国乙卷] 函数 $f(x) = x^3 + ax + 2$ 存在 3 个零点, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, -3)$
- C. $(-4, -1)$ D. $(-3, 0)$
11. [2021 · 全国乙卷] 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()
- A. $a < b$
- B. $a > b$
- C. $ab < a^2$
- D. $ab > a^2$

12. [2017·全国卷Ⅱ] 若 $x = -2$ 是函数 $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ()
- A. -1 B. $-2e^{-3}$
C. $5e^{-3}$ D. 1

13. (多选题)[2022·新高考全国Ⅰ卷] 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则 ()
- A. $f(x)$ 有两个极值点
B. $f(x)$ 有三个零点
C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

14. (多选题)[2024·新课标Ⅰ卷] 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, 则 ()
- A. $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点
B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(x^2)$
C. 当 $1 < x < 2$ 时, $-4 < f(2x-1) < 0$
D. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$

15. (多选题)[2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 ()
- A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点
B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

16. [2021·新高考全国Ⅰ卷] 函数 $f(x) = |2x-1| - 2\ln x$ 的最小值为_____.

17. [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

考向3 导数的综合问题

18. [2022·全国乙卷] 函数 $f(x) = \cos x + (x+1)\sin x + 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的最小值、最大值分别为 ()

- A. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
B. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
C. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$
D. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$

19. [2021·全国乙卷] 设 $a = 2\ln 1.01, b = \ln 1.02, c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ()
- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

20. [2022·全国甲卷] 已知 $a = \frac{31}{32}, b = \cos \frac{1}{4}, c = 4\sin \frac{1}{4}$, 则 ()
- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$
C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

21. [2021·新高考全国Ⅱ卷] 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|, x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图像在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的两条切线互相垂直, 且分别与 y 轴交于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是_____.

22. [2022·全国乙卷] 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2 (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的极小值点和极大值点. 若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

题型 1 导数解答题专练

1. [2023·新课标 I 卷] 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.
2. [2023·北京卷] 设函数 $f(x) = x - x^3 e^{ax+b}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$.
- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 设函数 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;
- (3) 求 $f(x)$ 极值点的个数.
3. [2022·全国乙卷] 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

4. [2024 · 新课标 II 卷] 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.
5. [2024 · 北京卷] 设函数 $f(x) = x + k \ln(1+x)$ ($k \neq 0$), 直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ ($t > 0$) 处的切线.
- (1) 当 $k=-1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 求证: l 不经过点 $(0, 0)$.
- (3) 当 $k=1$ 时, 设点 $A(t, f(t))$ ($t > 0$), $C(0, f(t))$, $O(0, 0)$, B 为 l 与 y 轴的交点, $S_{\triangle ACO}$ 与 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示 $\triangle ACO$ 与 $\triangle ABO$ 的面积. 是否存在点 A 使得 $2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$ 成立? 若存在, 这样的点 A 有几个?
- (参考数据: $1.09 < \ln 3 < 1.10$, $1.60 < \ln 5 < 1.61$, $1.94 < \ln 7 < 1.95$)
6. [2023 · 新课标 II 卷] (1) 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$;
- (2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1-x^2)$, 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.



7. [2022·新高考全国 I 卷] 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

8. [2024·新课标 I 卷] 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

(1) 若 $b=0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x)$ 的取值范围是 $(-2, +\infty)$, 求 b 的取值范围.

9. [2022·新高考全国 II 卷] 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

10. [2022 · 全国甲卷] 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.
- (1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围;
- (2) 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < 1$.

11. [2021 · 新高考全国 I 卷] 已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.